



جامعة حماه

كلية العلوم

السنة الثانية رياضيات

مقرر التحليل العددي

الفصل الأول: حساب الأخطاء

مدرس المقرر: د. محمد حمادة

حساب الأخطاء error computation

يوجد عدد كبير من المسائل في مختلف المجالات العلمية ، التي لا يمكن إيجاد حلها بالطرائق العادية التقليدية ، وهذا ما دعا العلماء إلى البحث عن طرائق عددية لحل مثل هذه المشاكل ، خاصة بعد التطور العلمي و التقني في مجال الحاسبات الالكترونية ، الذي مكّن الرياضيين من تطوير طرائق هذه الحلول .

يعتمد التحليل العددي على البحث عن أفضل الطرائق للحصول على نتائج حسابية من معطيات معينة ، حيث أنه من النادر أن تكون تلك المعطيات معلومة بدقة أي بدون أخطاء لأنها غالباً ما تكون ناتجة عن قياسات أو قوانين تقريبية ، إضافة إلى ذلك فإن طرائق الحل تسبب في بعض الأحيان أخطاءً إضافية . يمكننا تقسيم الأخطاء إلى عدة أنواع :

1- أخطاء الصيغ:

هي الأخطاء الناتجة عن الصيغ و العلاقات المستخدمة للتعبير عن الحوادث الطبيعية و القوانين الفيزيائية و الهندسية ، هذه القوانين أغلبها يكون تقريبياً، أو أنها تحوي ثوابت لا يمكن تعيينها بدقة نهائية وإنما هذه الثوابت تتغير وفقاً لظروف معينة.

2- أخطاء الاقتصار:

تنتج هذه الأخطاء من القوانين الرياضية ، حيث أنه في معظم الأحيان نكتب الدوال على شكل متسلسلات غير منتهية ، و عند إجراء العمليات الرياضية و الحسابية نكتفي بعدد محدود من حدود تلك المتسلسلات و هذا ما يؤدي إلى أخطاء مرتكبة .

3- أخطاء القياس:

تنتج هذه الأخطاء عن قياس بعض المقادير ، الذي يكون في معظم الأحيان تقريبياً ، حيث أن دقة القياس تتبع لحساسية الأجهزة المستخدمة في القياس ويمكن أن تكون هذه الأخطاء ناتجة عن حواس الشخص الذي يقوم بتلك القياسات .

4- أخطاء التدوير:

تنتج هذه الأخطاء عند التعبير عن بعض الأعداد الغير منتهية ، حيث نكتفي بعدد محدود من الأرقام بعد الفاصلة و نهمل بقية الأرقام ، وفي كثير من الأحيان نقوم بتدوير الأعداد (الاكتفاء بعدد محدود من الأرقام بعد الفاصلة) ، مثلاً العدد $e=2.718281828$ ، و العدد $1/3=0.3333333333$ هي أعداد تقريبية أرقامها غير منتهية ، لكن تم الاكتفاء بعدد محدود من الأرقام بعد الفاصلة.

توجد قواعد لتدوير الأعداد ، لكننا في جميع الحالات نرتكب أخطاءً لا يمكن إلغاؤها وتبقى الغاية تحديد هذه الأخطاء و التقليل منها . نشير أخيراً إلى أنه كلما استطاعت طرائق الحل تخفيض قيم الأخطاء المرتكبة ، كلما كانت أدق وأفضل و استخدامها أوسع .

سنهتم في هذا البحث بالأخطاء الناتجة عن تدوير الأعداد الحقيقية و الأخطاء الناتجة عن استخدام هذه الأعداد أثناء إجراء العمليات الحسابية ، والأخطاء الناتجة عن حساب قيم الدوال الحقيقية.

تدوير الأعداد: rounding off

إن طريقة تدوير الأعداد من أكثر الطرائق سهولةً ، وأكثرها استخداماً ، سنشرح هذه الطريقة في النظام العشري .

نفرض أنه لدينا العدد الكسري التالي:

$$Z = 0.a_1a_2 \dots a_n$$

إن تدوير هذا العدد هو الاكتفاء بـ $n-1$ رقم بعد الفاصلة بدلاً من n ، و بالتالي فإن العدد Z بعد عملية التدوير يكتب على الشكل التالي:

$$\tilde{Z} = 0.a_1a_2 \dots a'_{n-1}$$

حيث أن إشارة الفتحة فوق الرقم الأخير من هذا العدد تدلّ على أن الرقم ذو المرتبة ما قبل الأخيرة قد تغير .

لإجراء تدوير الأعداد نتبع ما يلي :

1- إذا كان $a_n > 5$ فإن الرقم الجديد هو: $a'_{n-1} = a_{n-1} + 1$

2- إذا كان $a_n < 5$ فإن الرقم الجديد هو: $a'_{n-1} = a_{n-1}$

3- إذا كان $a_n = 5$ فإننا هنا نميز حالتين:

أ- إذا كان الرقم a_{n-1} زوجياً فإن الرقم بعد التدوير هو: $a'_{n-1} = a_{n-1}$

أ- إذا كان الرقم a_{n-1} فردياً فإن الرقم بعد التدوير هو: $a'_{n-1} = a_{n-1} + 1$

مع ملاحظة أنه في الحالات السابقة نكون قد ارتكبنا خطأ لا يتجاوز $10^{-n} \times 5$.

مثال:

إلى ثلاثة أرقام عشرية ، ثم إلى رقمين عشريين : $Z=5.4527$ دور العدد

الحل:

نلاحظ في الحالة الأولى أن $\tilde{Z}_1 = 5.453$ لأن $a_n = 7 \succ 5$

و في الحالة الثانية أن $\tilde{Z}_2 = 5.45$ لأن $a_n = 3 \prec 5$

الخطأ في الحالة الأولى لا يتجاوز 5×10^{-4}

الخطأ في الحالة الثانية لا يتجاوز 5×10^{-3}

ملاحظة:

يمكننا تعريف تدوير الأعداد في النظام الثنائي بشكل مشابه لما سبق ، فإذا كان لدينا العدد التالي في النظام الثنائي:

$$I = 0.I_1 I_2 \dots I_n \quad ; \quad I_i = 0,1$$

فإن العدد I يكتب بعد تدويره و الاكتفاء بـ k رتبة ثنائية بالشكل التالي :

$$I_{k+1} = 0 \quad \text{وذلك عندما} \quad \tilde{I} = 0.I_1 I_2 \dots I_k$$

$$I_{k+1} = 1 \quad \text{وذلك عندما} \quad \tilde{I} = 0.I_1 I_2 \dots I_k + 2^{-k}$$

الخطأ المرتكب في هذه الحالة لا يتجاوز المقدار 2^{-k-1} .

تُعرّف في النظام الست عشري الأعداد المدوّرة بالشكل التالي :

بفرض أن العدد التالي مكتوباً في النظام الست عشري

$$J = 0.J_1 J_2 \dots J_n \quad ; \quad 0 \leq J_m \leq 16, m = 1, 2, \dots, n$$

فإن

$$0 \leq J_{m+1} < 8 \quad \text{إذا كان} \quad \tilde{J} = 0.J_1 J_2 \dots J_m$$

$$8 \leq J_{m+1} \leq 16 \quad \text{إذا كان} \quad \tilde{J} = 0.J_1 J_2 \dots J_m + 8 \times 16^{-m}$$

و الخطأ المرتكب لا يتجاوز $8 \times 16^{-m-1}$

الأخطاء المطلقة و الأخطاء النسبية: absolute and relative error

الخطأ المطلق:

بفرض أن Z هي القيمة الفعلية أو الحقيقية لعدد ما ، ولتكن $\tilde{Z}$ القيمة التقريبية له ،
إن الفرق ما بين القيمتين الفعلية و التقريبية بالقيمة المطلقة يدعى الخطأ المطلق
المرتكب ، نرمز للخطأ المطلق بالرمز δ_z أي أن:

$$\delta_z = |\Delta_z| = |z - \tilde{z}| \quad \dots \quad (1)$$

الخطأ النسبي:

الخطأ النسبي لعدد ما هو نسبة الخطأ المطلق إلى القيمة الفعلية للعدد ، نرمز للخطأ
النسبي للعدد Z بالرمز e_z أي أن :

$$e_z = \delta_z / z \quad \dots \quad (2)$$

في حال كون القيمة الحقيقية للعدد Z غير معلومة ، نستبدلها بالقيمة التقريبية له أي أن:

$$e_z = \delta_z / \tilde{z}$$

مثال:

دور العدد $z = 5.358$ إلى رقمين عشريين ، ثم احسب الخطأ المطلق و الخطأ النسبي المرتكبين أثناء عملية التدوير:

الحل:

باعتبار أن الرقم الأخير بعد الفاصلة أكبر من 5 ، فإننا نضيف الواحد الصحيح إلى الرقم ما قبل الأخير ، و بالتالي يصبح العدد المدور بالشكل

$$\tilde{z} = 5.36$$

أما الخطأ المطلق فيكون: $\delta_z = |z - \tilde{z}| = |5.358 - 5.36| = 0.002$

والخطأ النسبي: $e_z = \Delta_z / z = 0.002 / 5.358 = 0.000373273$

الأخطاء الناتجة عن العمليات الحسابية:

مبرهنة 1:

الخطأ المطلق المرتكب الناتج عن حاصل جمع عدّة أعداد تقريبية لا يتجاوز مجموع الأخطاء المطلقة المرتكبة في الأعداد التقريبية للمجموعة.

البرهان:

بفرض أن $\tilde{z}_1$ القيمة التقريبية للعدد z_1 والخطأ المطلق المرتكب δ_{z_1}

و بفرض أن $\tilde{z}_2$ القيمة التقريبية للعدد z_2 والخطأ المطلق المرتكب δ_{z_2}

نجمع العددين z_1 و z_2 فنجد :

$$z_1 + z_2 = (\tilde{z}_1 + \Delta_{z_1}) + (\tilde{z}_2 + \Delta_{z_2}) = (\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2) + (\Delta_{z_1} + \Delta_{z_2})$$

$$\Delta_{z_1+z_2} = (z_1 + z_2) - (\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2)$$

لكن لدينا

$$\Delta_{z_1+z_2} = \Delta_{z_1} + \Delta_{z_2}$$

أي أن :

$$|\Delta_{z_1+z_2}| \leq |\Delta_{z_1}| + |\Delta_{z_2}|$$

نأخذ القيمة المطلقة للطرفين نجد:

بالاستفادة من (1) نجد أن: (3) .. $\delta_{z_1+z_2} \leq \delta_{z_1} + \delta_{z_2}$

بشكل عام إذا كان لدينا $\widetilde{z}_i$ قيمة تقريبية لـ z_i ، حيث أن $i=1,2,3...n$: وإذا كان:

$$z = \sum_{i=1}^n z_i$$

$$\delta_z \leq \sum_{i=1}^n \delta_{z_i}$$

فأن

نتيجة 1:

الخطأ النسبي المرتكب في حاصل جمع مجموعة أعداد تقريبية لا يتجاوز مجموع الأخطاء النسبية المرتكبة ، أي أنه إذا كان : $Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$ فإن:

$$e_z \leq \sum_{i=1}^n e_{z_i}$$

نتيجة 2:

الخطأ المطلق الناتج عن طرح عددين تقريبيين لا يتجاوز مجموع خطأيهما المطلقين أي أن:

$$\delta_{z_1-z_2} \leq \delta_{z_1} + \delta_{z_2} \quad \text{..} \quad (4)$$

مبرهنة 2: إن الخطأ المطلق المرتكب في حاصل جداء عددين تقريبيين غير معدومين يعطى بالعلاقة التالية:

$$\delta_{z_1.z_2} \leq \delta_{z_1} |\tilde{z}_2| + \delta_{z_2} |\tilde{z}_1| \quad .. \quad (5)$$

البرهان:

بفرض أن $\tilde{z}_1$ القيمة التقريبية للعدد z_1 والخطأ المطلق المرتكب δ_{z_1} ،
وبفرض أن $\tilde{z}_2$ القيمة التقريبية للعدد z_2 والخطأ المطلق المرتكب δ_{z_2} .
نكتب جداء العددين z_1 و z_2 فنجد:

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (\tilde{z}_1 + \Delta_{z_1}).(\tilde{z}_2 + \Delta_{z_2}) \\ &= \tilde{z}_1.\tilde{z}_2 + \tilde{z}_1.\Delta_{z_2} + \tilde{z}_2.\Delta_{z_1} + \Delta_{z_1}.\Delta_{z_2} \end{aligned}$$

باعتبار أن الحد الأخير صغير جداً ، فيمكن إهماله و بالتالي نحصل على العلاقة التالية

$$\Delta_{z_1.z_2} = z_1.z_2 - \tilde{z}_1.\tilde{z}_2 = \tilde{z}_1.\Delta_{z_2} + \tilde{z}_2.\Delta_{z_1}$$

نأخذ القيمة المطلقة لطرفي هذه المساواة ،نجد أن:

$$\left| \Delta_{z_1.z_2} \right| \leq \left| \tilde{z}_1 \right| \cdot \left| \Delta_{z_2} \right| + \left| \tilde{z}_2 \right| \cdot \left| \Delta_{z_1} \right|$$

وحسب العلاقة (4) يكون:

$$\delta_{z_1.z_2} \leq \left| \tilde{z}_1 \right| \cdot \delta_{z_2} + \left| \tilde{z}_2 \right| \cdot \delta_{z_1} \quad .. \quad (6)$$

نلاحظ أنه تمكن تعميم ذلك إذا كان لدينا n من الأعداد $z_1, z_2, \dots, z_n$ كما يلي:

$$\delta_{z_1.z_2 \dots n} \leq \sum_{i=1}^n \delta_{z_i} \left| \prod_{j=1}^n \tilde{z}_j \right| \quad ; \quad i \neq j$$

نتيجة 3: الخطأ النسبي المرتكب في حاصل جداء مجموعة أعداد تقريبية لا يتجاوز مجموع الأخطاء النسبية المرتكبة ، أي أنه إذا كان : $Z = z_1.z_2. z_n$ فإن:

$$e_z \leq \sum_{i=1}^n e_{z_i}$$

مبرهنة 3 :

إن الخطأ المطلق المرتكب في حاصل قسمة عددين تقريبيين يعطى بالعلاقة التالية:

$$\delta_{z_1/z_2} \leq \frac{\delta_{z_1}}{|\tilde{z}_2|} + \delta_{z_2} \frac{|\tilde{z}_1|}{\tilde{z}_2^2} ; \tilde{z}_2 \neq 0$$

البرهان:

بفرض أن $\tilde{z}_1$ القيمة التقريبية للعدد z_1 ، والخطأ المطلق المرتكب δ_{z_1}
وبفرض أن $\tilde{z}_2$ القيمة التقريبية للعدد z_2 ، والخطأ المطلق المرتكب δ_{z_2}
، لنوجد حاصل قسمة z_1 على z_2 :

$$z_1/z_2 = \frac{\tilde{z}_1 + \Delta_{z_1}}{\tilde{z}_2 + \Delta_{z_2}} = \frac{\tilde{z}_1 + \Delta_{z_1}}{\tilde{z}_2} \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta_{z_2}}{\tilde{z}_2}} \right) = \frac{\tilde{z}_1 + \Delta_{z_1}}{\tilde{z}_2} \left(1 + \frac{\Delta_{z_2}}{\tilde{z}_2} \right)^{-1}$$

$$= \frac{\tilde{z}_1 + \Delta_{z_1}}{\tilde{z}_2} \left(1 - \frac{\Delta_{z_2}}{\tilde{z}_2} + \frac{\Delta_{z_2}^2}{\tilde{z}_2^2} + \dots \right) = \frac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_2} + \frac{\Delta_{z_1}}{\tilde{z}_2} - \frac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_2^2} \Delta_{z_2} + \dots$$

هناك حدود قد تم حذفها نظراً لصغرهما ، وهي من الدرجة الثانية بالنسبة للمقادير Δ_{z_1} و Δ_{z_2} نأخذ القيمة المطلقة للطرفين ، وذلك بعد إهمال الحدود الصغيرة فنجد أن:

$$\left| \Delta_{z_1 / z_2} \right| \leq \frac{\left| \Delta_{z_1} \right|}{\left| \tilde{z}_2 \right|} + \left| \Delta_{z_2} \right| \cdot \frac{\left| \tilde{z}_1 \right|}{\tilde{z}_2}$$

و بالتالي يكون:

$$\delta_{z_1 / z_2} \leq \frac{\delta_{z_1}}{\left| \tilde{z}_2 \right|} + \delta_{z_2} \cdot \frac{\left| \tilde{z}_1 \right|}{\tilde{z}_2^2} \quad .. \quad (7)$$

نتيجة 4 :

الخطأ النسبي الناتج عن حاصل قسمة عددين تقريبيين لا يتجاوز مجموع الأخطاء النسبية للعددين أي أن:

$$e_{z_1 / z_2} \leq e_{z_1} + e_{z_2}$$

مثال :

$$Z_1 = 2.345 , Z_2 = 3.5364$$

نفرض العددين

والمطلوب هو إيجاد الخطأ المطلق و الخطأ النسبي المرتكبين أثناء حساب المقادير التالية :

$$Z_1 + Z_2 , Z_1 - Z_2 , Z_1 \cdot Z_2 , Z_1 / Z_2$$

و ذلك على اعتبار أن العددين Z_1 و Z_2 عددين مدوّرين.

الحل:

إن الخطأ المطلق الناتج عن جمع العددين Z_1 و Z_2 لا يتجاوز مجموع خطأيهما المطلقين أي أن :

$$\delta_{Z_1 + Z_2} \leq \delta_{Z_1} + \delta_{Z_2}$$

إن الخطأ المطلق المرتكب أثناء تدوير كلاً من العددين Z_1 و Z_2 يكتب كما يلي:

$$\delta_{Z_1} \leq 5 \times 10^{-4} , \quad \delta_{Z_2} \leq 5 \times 10^{-5}$$

و بالتالي يكون الخطأ المطلق في المجموع هو:

$$\delta_{z_1+z_2} \leq \delta_{z_1} + \delta_{z_2} = 5 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-5} = 0.00055$$

و الخطأ النسبي في هذه الحالة يعطى بالشكل:

$$e_{Z_1+Z_2} = (\delta_{Z_1+Z_2}) / (Z_1 + Z_2) = 0.000093515$$

كذلك الأمر فإن الخطأ المطلق الناتج عن طرح العددين Z_1 و Z_2 يساوي نفس القيمة السابقة لأن :

$$\delta_{z_1-z_2} \leq \delta_{z_1} + \delta_{z_2}$$

أما الخطأ النسبي الناتج عن عملية الطرح فيعطى بالعلاقة التالية:

$$e_{Z_1-Z_2} = (\delta_{Z_1-Z_2}) / |Z_1 - Z_2| = (0.00055)(1.1914) = 0.00046164$$

أما الخطأ المطلق الناتج عن جداء العددين Z_1 و Z_2 فهو:

$$\delta_{z_1.z_2} \leq |\tilde{z}_1| . \delta_{z_2} + |\tilde{z}_2| . \delta_{z_1} = \\ = 2.345 (5 \times 10^{-4}) + 3.5364 (5 \times 10^{-5}) = 0.00134932$$

والخطأ النسبي:

$$e_{z_1.z_2} = \delta_{z_1.z_2} / (z_1.z_2) = 0.00134932 / [(2.345)(3.5364)]$$

و أخيراً فإن الخطأ المطلق و الخطأ النسبي في حالة القسمة هما:

$$\delta_{z_1/z_2} \leq \frac{\delta_{z_1}}{|\tilde{z}_2|} + \delta_{z_2} . \frac{|\tilde{z}_1|}{\tilde{z}_2} = \\ = \frac{5 \times 10^{-4}}{3.5364} + (5 \times 10^{-5}) \frac{2.345}{(3.5364)^2} = 0.000150762$$

الخطأ المطلق والخطأ النسبي المرتكبين في حساب قيمة دالة:

مبرهنة 4:

بفرض لدينا الدالة $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ، التي تتبع لـ n من المتحولات x_i ،
و ذلك بأخطاء مطلقة δ_{x_i} على الترتيب ، حيث أن $i = 1, 2, 3, \dots, n$.
يعطى الخطأ المطلق في حساب قيمة هذه الدالة بالشكل التالي:

$$(\delta_f)_{\max} \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \delta_{x_i} \quad \dots (8)$$

(تقبل هذه المبرهنة بدون برهان) .

$$(e_f)_{\max} = \left(\frac{\delta_f}{f} \right)_{\max} \quad \dots (9)$$

أما الخطأ النسبي فيعطى بالعلاقة التالية:

إذا كانت الدالة معطاة بالشكل: $f = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 1$$

فان

وبالتالي يكون:

$$(\delta_f)_{\max} \leq \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$$

أما إذا كانت الدالة معطاة بالشكل: $f(x_1, x_1, \dots, x_n) = x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$

فيمكن حساب الخطأ النسبي بالشكل التالي:

$$(e_f)_{\max} \leq \sum_{i=1}^n |m_i| \cdot \left| \frac{\delta_{x_i}}{x_i} \right|$$

إذا كانت : ، نحصل على الخطأ المرتكب في حالة الرفع إلى قوة ، وبشكل مشابه نحصل على الخطأ المرتكب في حالة الجذر.

مثال:

أوجد الخطأ المطلق و الخطأ النسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة التالية:

$$f(x, y) = xy$$

حيث أن: $x = 1.24$, $y = 3.53$ عدنان مدوران.

الحل:

الخطأ المطلق المرتكب يعطى بالشكل التالي:

$$(\delta_f)_{\max} \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta_x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \delta_y = y \delta_x + x \delta_y$$

$$\delta_x = \delta_y = 5 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow (\delta_f)_{\max} = 3.53(5 \times 10^{-3}) + 1.24(5 \times 10^{-3}) = 0.02385$$

أما الخطأ النسبي المرتكب فنجدّه كما يلي:

$$(e_f)_{\max} = \delta_f / f \leq \frac{\delta_x}{x} + \frac{\delta_y}{y} = 5 \times 10^{-3} \left(\frac{1}{1.24} + \frac{1}{3.53} \right)$$
$$= 0.00544868$$